

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d. En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
 « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

EXERCICE 2**5 points**

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1.
 - a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 - b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 - d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

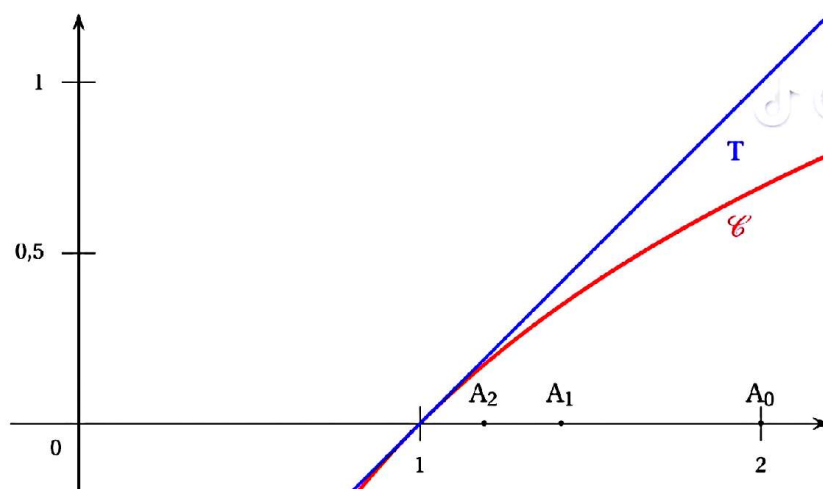
Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$ et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite T est $y = x - 1$.

Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$.

- a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
 - b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
 - c. Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel Briggs(a) renvoie une approximation de $\ln(a)$.

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt (a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

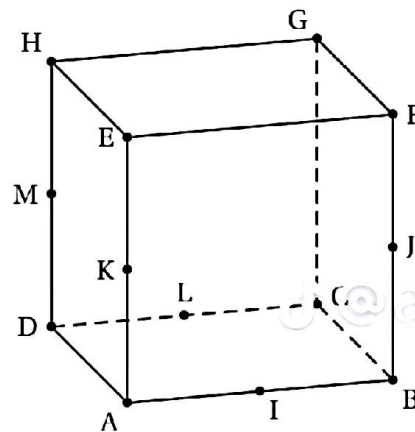
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

EXERCICE 3

5 points

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$

- les points $A(2 ; 0 ; -1)$ et $B(5 ; -3 ; 7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}'$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

EXERCICE 4

5 points

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

- b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

- c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

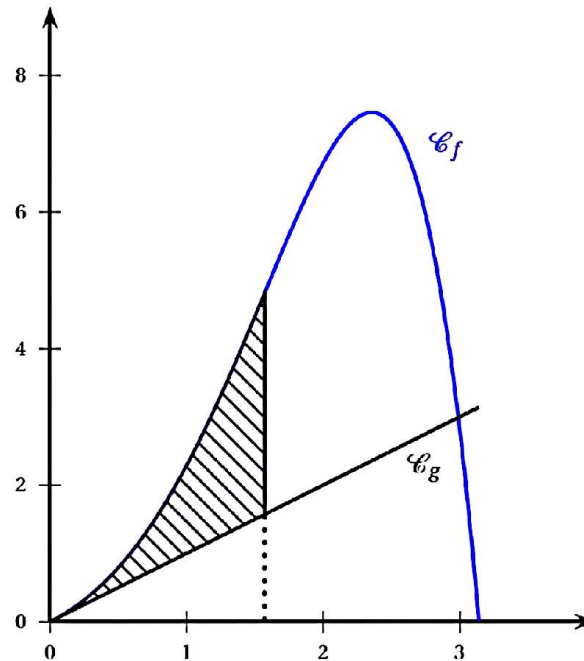
$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



d @ a g e b r i k e